209 | Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples. | Fonction Zêta de Riemann. | Monier 4.

Soient X un ensemble non vide, K=ℝ ou ℂ, E une K-ev de dim. finie (*ok si E Banach*).

Def 1: On appelle **série de fonctions** (1) et on notera $\sum_{n\geq 0} f_n$ tout couple $\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}},(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ formé d'une suite de fonctions f_n : X→E et de la suite des $S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$, appelées **$n^{\text{ièmes}}$ sommes partielles**, pour n∈ℕ.

I. Différents modes de convergence.

A. Cv simple et cv absolue.

Def 2: On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ **converge simplement** (sur X) ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles CS (sur X).
Dans ce cas, on définit pour tout n∈ℕ le **reste d'ordre n**:
$R_n : X \to E$ tq $\forall x\in X, R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

On appelle **somme de la série** $\sum_{n\geq 0} f_n$, et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, l'application: $x\in X \mapsto \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Def 3: On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ **converge absolument** (sur X) ssi pour chaque x de X, $\sum_{n\geq 0}\left\|f_n(x)\right\|$ converge (dans ℝ).

Prop 1: La Cv ABS ⇒ la CS. (2).

Exemple: (Mon ex.4.3.2.a) La série de terme général, pour tout x∈ℝ, $f_n(x)=\frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ cv. absolument.

B. Convergence uniforme.

Def 4: On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ **converge uniformément** (sur X) ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément (sur X). (3)

Prop 2: $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU sur X ⇒ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{CU} 0$ sur X.

Prop 3: $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU ssi: $\begin{cases}\sum_{n\geq 0} f_n \text{ CS} \\ \text{la suite } (R_n)_{n\geq 0} \xrightarrow{CU} 0\end{cases}$ (4)

Exemple: (Mon ex.4.3.2.a) La série de terme général, pour tout x∈ℝ, $f_n(x)=\frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ CS par le TSSA pour tout x∈ℝ*, et $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{CU} 0$, donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU sur ℝ.

Prop 4: **Critère de Cauchy uniforme.**
$\sum_{n\geq 0} f_n$ CU sur X ssi :

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \text{ tq } \forall q>p\geq N, \forall x\in X, \left\|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right\|\leq\varepsilon$$

C. Convergence normale.

Def 5: On dit que $\sum_{n\geq 0} f_n$ **converge normalement** (sur X) ssi ∃N∈ℕ t.q.: $\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow f_n \text{ est bornée}) \\ \sum_{n\geq N}\|f_n\|_\infty \text{ converge.}\end{cases}$

Exemple:(Mon ex.4.3.2.a) $f_n(x)=\frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$
ne converge pas normalement sur]-∞;0[ni [0;+∞[, mais CN sur tout]-∞; - a] U [a ;+∞[, pour a>0 fixé.

Prop 5: $\sum_{n\geq 0} f_n$ CN ⇒ $\sum_{n\geq 0} f_n$ CU.

Bilan:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & \sum_{n\geq 0} f_n \ C.A. \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\sum_{n\geq 0} f_n \ C.N. \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \sum_{n\geq 0} f_n \ C.S. \\
 & \sum_{n\geq 0} f_n \ C.U. \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

II. Propriétés de la somme.

A. Limite. (échange Σ et "lim")

Th 1: Soient $a\in\overline{X}$, $\sum_{n\geq 0}(f_n : X\to E)$ une série de fonct.

Si: $\begin{cases}\text{Pour tout n de } \mathbb{N}, f_n \text{ admet une limite } l_n \text{ en a} \\ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CU sur X}\end{cases}$

alors, en notant $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$: $\begin{cases}\sum_{n\geq 0} l_n \text{ CV} \\ S \text{ admet une limite en } a \\ \lim_a S=\sum_{n=0}^{+\infty} l_n\end{cases}$

Cor: Soient I int. de ℝ, $\sum_{n\geq 0}(f_n : X\to E)$ série de fonct.

Si: $\begin{cases}\text{Pour tout n de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } I \\ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CU localement}^{(*)} \text{ sur X}\end{cases}$

(*): Converge localemt unift: CU sur tt compact de I

Alors: $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est **continue** sur I.

B. Dérivabilité.

Th 2:Soient $k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n\geq 0}(f_n : X \to E)$ une série de fonct.

Si: $\begin{cases} \text{Pour tout n de } \mathbb{N}, f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k-1]\!], \sum_{n\geq 0} f_n^{(i)} \text{ CS sur } I \quad (*) \\ \sum_{n\geq 0} f_n^{(k)} \text{ CU sur tout segment de } I \end{cases}$

alors: $\begin{cases} \forall i \in [\![0;k-1]\!], \sum_{n\geq 0} f_n^{(i)} \text{ CU sur tout segment de } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ \forall i \in [\![0;k]\!], \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)} \end{cases}$

(*) On peut remplacer cette hyp. par: $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS sur I.

Exemple: Etude de la fonction ζ de Riemann.

$\zeta : x \in]1;+\infty[\mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^x}$.

C. Intégration. (échange Σ et ∫)

a) Sur un segment.

Th 3: Soient $a,b \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0}(f_n : X \to E)$ série de fonct.

Si: $\begin{cases} \text{Pour tout n de } \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [a;b] \\ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CU sur } [a;b] \end{cases}$

alors: $\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [a;b] \\ \sum_{n\geq 0}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) \text{ converge dans E} \\ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \end{cases}$

Exemple: $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = x$

Remarque: Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS vers une limite cont. par mcx.,

et si $\int_a^b R_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, alors on peut échanger Σ et ∫.

Exemple: $\forall a > 0, \int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$

b) Sur un intervalle quelconque.

I intervalle de ℝ, non vide et non réduit à un point.

Th 4: **(Cv monotone)** Soit $\sum_{n\geq 0}(f_n : I \to \mathbb{R})$

Si: $\begin{cases} \text{Pour tout n de } \mathbb{N}, f_n \text{ est cont. mcx}, \ \geq 0, \text{ int. sur } I \\ \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CS sur } I \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ cont. mcx sur } I \end{cases}$

alors: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ssi $\sum_{n\geq 0}\left(\int_I f_n\right)$ converge.

De plus, dans ces conditions, $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right)$

Exemple: $\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{n!(1+x^2)}dx \underset{CV}{=} \frac{\pi}{2}$

III. Notes.

(1) Différence entre "fonction" et "application":
Par une application, x a une image unique,
par une fonction il a au plus une image.
(2) Vrai car E Banach.
(3) Différence entre CS et CU (Gourdon):

$f_n \xrightarrow{CS} f$:
∀ε>0, ∀x∈X, $\exists N_x \in \mathbb{N}$: ∀n≥N, $d(f_n(x), f(x))<\varepsilon$

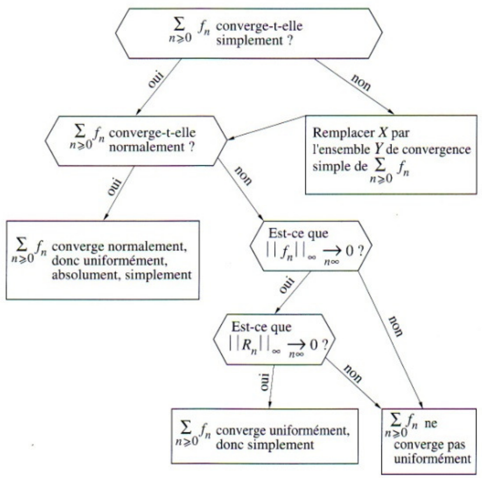
$f_n \xrightarrow{CU} f$:
∀ε>0, ∃N∈ℕ: ∀n≥N, ∀x∈X, $d(f_n(x), f(x))<\varepsilon$

Dans le second cas, N est indépendant de x.
CU ⇒ CS.

(4) En pratique, mq la série cv, puis mq $\|R_n\|_\infty \to 0$.

Plan sommaire pour l'étude d'une série d'applications

Il s'agit d'étudier, sur un exemple donné, les convergences d'une série d'applications $\sum_{n\geq 0}(f_n : X \longrightarrow E)$. On peut proposer le plan suivant, qu'il sera parfois nécessaire de compléter :



Dans le cas où il n'y pas convergence normale ou uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur X, on indiquera des parties de X sur lesquelles il y ait convergence normale ou uniforme.